

# Sur les représentations $p$ -adiques géométriques de conducteur 1 et de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}}$ .

J.-P. WINTENBERGER

February 1, 2008

*Résumé.* En bas poids et sous des hypothèses convenables, nous prouvons qu'il n'existe pas de représentation  $p$ -adique géométrique irréductible de conducteur 1 et de dimension 2 de  $G_{\mathbb{Q}}$ , conformément à une conjecture de Fontaine et Mazur.

*Summary.* We prove that there is no geometric  $p$ -adic representation of the Galois group of  $\mathbb{Q}$  which is irreducible, of dimension 2, of conductor 1 and low weight, according to a conjecture of Fontaine and Mazur.

## 1 Introduction et énoncé du résultat principal.

Soient  $p$  un nombre premier et  $\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques. Soit  $\overline{\mathbb{Q}}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ . On note  $G_{\mathbb{Q}}$  le groupe de Galois de  $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ . Pour  $L$  extension de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , on note  $G_L$  le groupe de Galois de  $\overline{\mathbb{Q}}/L$ . On désigne par  $E$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Une représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}}$  à coefficients dans  $E$  est un homomorphisme continu  $\rho$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans  $\mathrm{GL}_E(U)$ , où  $U$  est un  $E$ -espace vectoriel de dimension finie.

Une telle représentation est *géométrique* si elle vérifie les deux conditions suivantes ([11]):

- sa restriction à un sous-groupe de décomposition  $D_p$  en  $p$  est potentiellement semi-stable au sens de la théorie de Fontaine (exp. 8 de [1]),
- il existe un ensemble fini  $S$  de nombres premiers tel que  $\rho$  soit non ramifiée en dehors de  $S \cup \{p\}$ .

Une représentation géométrique a un conducteur  $N(\rho)$  ([11]). Pour  $\ell \neq p$ , l'action du groupe de décomposition  $D_{\ell}$  sur  $U$  définit une action du groupe de Weil-Deligne  $\mathrm{WD}_{\ell}$  sur  $U$ , donc la composante  $N_{\ell} = l^*$  en  $\ell$  du conducteur  $N(\rho)$  ( $N_{\ell} = 1$  si  $\ell \notin S \cup \{p\}$ ). On a de même une action du groupe de Weil-Deligne  $\mathrm{WD}_p$  sur le module de Dieudonné filtré associé à la restriction de  $\rho$  à  $D_p$ , ce qui définit la composante en  $p$  de  $N(\rho)$ . En particulier,  $N(\rho) = 1$  si et seulement si  $\rho$  est cristalline en  $p$  et non ramifiée hors de  $p$ .

Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_E(U)$  une représentation  $p$ -adique à coefficients dans  $E$ . Il n'est pas difficile de voir que, si la restriction de  $\rho$  à un sous-groupe de décomposition  $D_p$  en  $p$  est de Hodge-Tate, les poids de Hodge-Tate de  $\rho$ ,

considérée comme représentation dans le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $U$ , ont des multiplicités qui sont multiples de  $[E : \mathbb{Q}_p]$  (prop 1). On appelle *poids de Hodge-Tate* de  $\rho$  ces poids, avec les multiplicités divisées par  $[E : \mathbb{Q}_p]$ .

Supposons  $\rho$  de dimension 2. Soit  $c \in G_{\mathbb{Q}}$  une conjugaison complexe. La représentation  $\rho$  est *impaire* si  $\rho(c)$  a comme valeurs propres 1 et  $-1$ , *i.e.* si  $\rho(c)$  est de déterminant  $-1$ .

Soit  $f = q + \dots + a_n q^n + \dots$  une forme modulaire primitive (parabolique, propre pour les opérateurs de Hecke) de conducteur  $N(f)$  (sur  $\Gamma_1(N(f))$ ). Notons  $E(f)$  son corps de rationalité, *i.e.* le corps engendré par les coefficients de  $f$  et les valeurs du caractère de  $f$ . Le corps  $E(f)$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}$ . Soit  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ . On sait associer à  $f$  et à un plongement  $i$  de  $E(f)$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une représentation  $p$ -adique  $\rho_{f,i} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$ ,  $E$  étant l'adhérence de l'image de  $i$ . Elle est non ramifiée en  $\ell$  pour tout nombre premier  $\ell$  qui est distinct de  $p$  et ne divise pas  $N(f)$  et est caractérisée par :

$$\mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frob}_{\ell})) = i(a_{\ell}),$$

pour ces  $\ell$ . De plus,  $\rho_{f,i}$  est absolument irréductible, impaire, géométrique de conducteur  $N(f)$  et de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ .

Il est conjecturé que, si  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  est une représentation absolument irréductible, impaire, géométrique de conducteur  $N$  et de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ , alors  $\rho$  est isomorphe à  $\rho_{f,i}$  pour  $f$  forme primitive de conducteur  $N$  et de poids  $k$  et  $i$  un plongement du corps de rationalité  $E(f)$  de  $f$  dans  $E$  ([11]).

Une forme primitive de conducteur 1 a un poids  $k$  pair. Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  géométrique de conducteur 1 et de poids  $(0, k-1)$ . Il n'est pas difficile de prouver que  $\det(\rho) = \chi_p^{k-1}$ ,  $\chi_p : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$  désignant le caractère cyclotomique (corollaire 1). On voit donc que  $\rho$  est impaire si et seulement si  $k$  est pair. Comme il n'existe pas de forme primitive  $f$  de conducteur 1 et de poids  $k < 12$ , la conjecture de Fontaine et Mazur prédit qu'il n'existe pas de  $\rho$  géométrique, absolument irréductible de conducteur 1 et de poids  $(0, k-1)$  pour  $k$  pair  $< 12$ .

Fontaine et Abrashkin ont prouvé que, pour des  $p$  petits, il n'existe pas de représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}}$  qui soit géométrique de conducteur 1, de poids de Hodge-Tate petits, irréductible de dimension  $\neq 1$  ([9],[10],[2]). Taylor a prouvé une version potentielle de la conjecture de Fontaine et Mazur ([24],[23]). L'objet de cet article est de montrer que les théorèmes de Taylor, et de Fontaine et Abrashkin, permettent de prouver dans certains cas cette inexistence de représentation de conducteur 1 et dimension 2.

En fait, on a un énoncé concernant des représentations qui ne sont pas nécessairement semi-simples. Soit  $H_f^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(m))$  le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel qui classe les extensions de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(m)$  qui sont de conducteur 1. On sait que  $H_f^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(m))$  est de dimension 1 si  $m$  est impair  $\geq 3$  et nul sinon (ceci résulte essentiellement de travaux de Soulé : remarque du 4.2. de [14], lemme 4.3.1. de [3]). Il existe donc une représentation  $p$ -adique  $U_{p,3}$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  qui est géométrique de conducteur 1 et qui est une extension non triviale d'une représentation de dimension 1 avec action de  $G_{\mathbb{Q}}$  triviale, par une représentation de dimension 1 avec

action de  $G_{\mathbb{Q}}$  donnée par  $\chi_p^3$ . Cette représentation est unique à isomorphisme près. Nous prouvons :

**Théorème 1** *Soient  $E$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $U$  un  $E$ -espace vectoriel de dimension 2 et  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_E(U)$  une représentation  $p$ -adique à coefficients dans  $E$ . On suppose que  $\rho$  est géométrique de conducteur 1 de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$  avec  $k = 2$  ou  $k = 4$  et que dans ce deuxième cas, que  $p$  soit  $\geq 7$ . Alors,  $\rho$  est isomorphe :*

- si  $k = 2$ , à  $E \oplus E(1)$  (l'action  $G_{\mathbb{Q}}$  sur  $E$  étant triviale) ;
- si  $k = 4$ , soit à  $E \oplus E(3)$ , soit à  $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} U_{p,3}$ .

*Remarque.* Le cas  $k = 1$  est sans intérêt, puisque si  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  est géométrique de conducteur 1 et de poids  $(0,0)$ , elle est partout non ramifiée, donc triviale. Il est possible que l'on puisse se débarrasser dans le théorème de l'hypothèse  $p \geq 7$  par les méthodes de Fontaine et Abrashkin.

Le coeur de la preuve est au 2.4. la construction d'une représentation  $q$ -adique,  $q$  nombre premier  $\neq p$ , qui est potentiellement compatible à  $\rho$ . Cette construction repose sur le théorème de Taylor et un petit complément à ce théorème (prop. 4). On conclut grâce aux théorèmes de Fontaine et Abrashkin. Le 2.1. et le 2.2 sont des préliminaires. Dans le 3, nous donnons une application aux groupes  $p$ -divisibles sur  $\mathbb{Z}$ . Dans le 4, nous prouvons que des représentations  $p$ -adiques géométriques de conducteur 1 de bas poids n'existent pas, sous une hypothèse d'ordinarité en 3 : nous utilisons un théorème de Serre ([16] : Oeuvres, vol 3 p. 710 ) au lieu des théorèmes de Fontaine et Abrashkin et un théorème de Skinner et Wiles ([18]).

Je voudrais remercier Henri Carayol pour avoir répondu à mes multiples questions. Je voudrais aussi remercier Laurent Berger, Christophe Breuil, Mladen Dimitrov, Jean-Marc Fontaine, Eknath Ghate, Bernadette Perrin-Riou et Jacques Tilouine pour des conversations utiles. Alors que je terminais la rédaction de ce papier, Christophe Breuil m'a signalé une prépublication de Luis Dieulefait avec des résultats similaires aux nôtres ([7]).

## 2 Preuve du théorème 1.

### 2.1 Représentations de Hodge-Tate de $G_{\mathbb{Q}_p}$ .

Soit  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  ; désignons par  $G_{\mathbb{Q}_p}$  le groupe de Galois de  $\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p$  et par  $C_p$  le complété de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ .

#### 2.1.1 Poids des représentations de Hodge-Tate de $G_{\mathbb{Q}_p}$ .

Si  $G'$  est un sous-groupe ouvert de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  et  $W$  un  $C_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire et continue de  $G'$ ,  $W$  admet une décomposition de Hodge-Tate si l'on a :

$$W = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} (C_p \otimes_{\mathbb{Q}_p}^{G'} W(-i)^{G'}),$$

$W(-i)$  étant  $W$  muni de l'action de  $G'$  tordue par  $\chi_p^{-i}$  ([21]). Les poids de Hodge-Tate de  $W$  sont alors les entiers  $i$  tels que  $W(-i)^{G'} \neq (0)$ , comptés avec la multiplicité  $\dim_{\mathbb{Q}_p}^{G'} (W(-i)^{G'})$ .

Soit  $U$  un  $E$ -espace vectoriel de dimension finie  $d$ . Soit  $\rho : G' \rightarrow \mathrm{GL}_E(U)$  une représentation  $p$ -adique à coefficients dans  $E$ . On suppose que  $\rho$  est de Hodge-Tate *i.e.* que  $W = C_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$ , muni de l'action de  $G'$  produit tensoriel, admet une décomposition de Hodge-Tate. Notons  $(\lambda, w) \mapsto [\lambda]w$ , pour  $\lambda \in E$  et  $w \in W$ , l'action de  $E$  sur  $W$  induite par celle de  $E$  sur  $U$ . Notons  $P(E, \overline{\mathbb{Q}_p})$  l'ensemble des plongements de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . Pour  $\iota \in P(E, \overline{\mathbb{Q}_p})$ , notons  $W_\iota$  le sous-espace vectoriel de  $W$  formé des  $w \in W$  vérifiant  $[\lambda]w = \iota(\lambda)w$ . On a donc :

$$W = \oplus_{P(E, \overline{\mathbb{Q}_p})} W_\iota.$$

Un sous-espace vectoriel de  $W$  stable par  $G'$  admet une décomposition de Hodge-Tate (*cf* par exemple exp. 3 de [1]). Il en résulte que chacun des  $W_\iota$  admet une décomposition de Hodge-Tate. On appelle *type de Hodge-Tate de  $\rho$*  l'application de l'ensemble  $P(E, \overline{\mathbb{Q}_p})$  dans les familles de  $d$  entiers qui à  $\iota$  associe les poids de Hodge-Tate de  $C_p \otimes_{\iota, E} U$ . La proposition suivante est bien connue :

**Proposition 1** *On suppose  $G' = G_{\mathbb{Q}_p}$ . Alors, le type de Hodge-Tate de  $\rho$  est constant : les poids de Hodge-Tate de  $C_p \otimes_{\iota, E} U$  ne dépendent pas de  $\iota$ .*

On appelle *poids de Hodge-Tate* de la représentation  $p$ -adique  $\rho$  de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  à coefficients dans  $E$  les poids de Hodge-Tate de  $C_p \otimes_{\iota, E} U$ , pour un  $\iota$  (comptés avec leurs multiplicités dans  $C_p \otimes_{\iota, E} U$ ).

*Preuve de la proposition.* Reprenons les notations ci-dessus. Soit  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ . Comme, si  $w \in W_\iota$  :

$$[\lambda](\sigma w) = \sigma([\lambda]w) = \sigma(\iota(\lambda)w) = (\sigma\iota)(\lambda)\sigma(w),$$

on voit que  $\sigma$  définit une bijection de  $W_\iota$  sur  $W_{\sigma\iota}$ . Soit  $G''$  le sous-groupe ouvert de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  qui fixe le sous-corps de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  engendré par les  $\iota(E)$ . Le groupe  $G''$  agit sur  $W_\iota$  et  $W_{\sigma\iota}$ . Notons  $\mathrm{int}(\sigma^{-1})(W_\iota)$  le  $C_p$ -espace vectoriel  $W_\iota$ , muni de l'action de  $G''$  définie par  $(\tau, w) \mapsto \sigma^{-1}\tau\sigma(w)$ . Alors,  $\sigma$  induit un isomorphisme des  $C_p$ -espaces vectoriels munis des actions semi-linéaires de  $G''$  :

$$C_p \otimes_{\sigma, C_p} \mathrm{int}(\sigma^{-1})(W_\iota) \simeq W_{\sigma\iota}.$$

Comme  $C_p \otimes_{\sigma, C_p} \mathrm{int}(\sigma^{-1})(W_\iota)$  a les mêmes poids de Hodge-Tate que  $W_\iota$ , la proposition en résulte.  $\square$

### 2.1.2 Le cas des caractères.

**Proposition 2** Soit  $\eta : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow E^*$  un caractère continu de  $G_{\mathbb{Q}}$ . On suppose que  $\eta$  est non ramifié en dehors de  $p$  et que la représentation  $p$ -adique  $E(\eta)$  de dimension 1 qu'il définit est cristalline en  $p$ . Alors, il existe un entier  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\eta$  soit le composé de  $\chi_p^i : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$  avec l'inclusion  $\mathbb{Q}_p^* \hookrightarrow E^*$ .

*Démonstration.* Soit  $i$  le poids de Hodge-Tate de  $E(\eta)$  (cf proposition précédente). La représentation  $E(\eta\chi_p^{-i})$  est non ramifiée partout, donc triviale.  $\square$

**Corollaire 1** Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  une représentation géométrique de conducteur 1 et de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ . On a  $\det(\rho) = \chi_p^{k-1}$ .

## 2.2 Le cas des représentations potentiellement abéliennes.

**Proposition 3** Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_d(E)$  une représentation  $p$ -adique qui est irréductible, géométrique de conducteur 1 et qui est potentiellement abélienne : il existe  $L \subset \overline{\mathbb{Q}}$  extension finie de  $\mathbb{Q}$  telle que la restriction de  $\rho$  au groupe de Galois  $G_L$  ait une image abélienne. Alors,  $d = 1$  et  $\rho$  est isomorphe à  $E(j)$ , pour un entier  $j$ .

Prouvons tout d'abord le lemme :

**Lemme 1** Soit  $\eta : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_{d'}(\mathbb{Q}_p)$  une représentation  $p$ -adique géométrique de conducteur 1. Alors, l'adhérence de Zariski de l'image de  $\eta$  est connexe.

*Preuve du lemme.* Comme  $\mathbb{Q}$  n'a pas d'extension partout non ramifiée,  $\eta(G_{\mathbb{Q}})$  est engendrée par les images des sous-groupes d'inertie au dessus de  $p$ . Comme  $\rho$  est cristalline en  $p$ , ces images ont une adhérence de Zariski connexe (prop. 3.8.4. de [8]). Le lemme en résulte.

*Remarque.* Le lemme vaut si  $\eta$  est seulement supposée non ramifiée hors de  $p$  et semi-stable en  $p$ .

Prouvons la proposition. Soit  $\eta$  la représentation  $\rho$  vue comme représentation dans  $\mathrm{GL}_{d[E:\mathbb{Q}_p]}(\mathbb{Q}_p)$ . Soient  $H$  l'adhérence de Zariski de l'image de  $\eta$  et  $H^0$  sa composante neutre. Comme  $\eta$  est semi-simple et potentiellement abélienne,  $H^0$  est un tore. Le lemme dit que  $H = H^0$ , donc  $\eta$  est abélienne. Elle est localement algébrique au sens de Serre (3.1. de [17]). Comme elle est de conducteur 1, elle provient d'une représentation du groupe de type multiplicatif  $S_{\mathbb{Q},1}$ , relatif à  $\mathbb{Q}$  et de conducteur 1 (2 de [17]). Le  $S_{\mathbb{Q},1}$  est réduit à  $\mathbb{G}_m$ , la représentation  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$  étant donnée par le caractère cyclotomique. Comme  $\eta$  est obtenue en composant cette représentation avec une représentation de  $\mathbb{G}_m$ , on voit que  $\eta$  est somme de  $\mathbb{Q}_p(j)$ . La proposition en résulte.  $\square$

## 2.3 Le théorème de Taylor.

### 2.3.1 Enoncé.

Dans [24] et [23], Taylor prouve :

**Théorème 2** *On suppose  $p > 3$ . Soit  $k$  un entier. Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  une représentation  $p$ -adique absolument irréductible, impaire, non ramifiée en dehors d'un ensemble fini  $S$  de premiers, et cristalline en  $p$  de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ . On suppose que  $2 \leq k \leq (p+1)/2$ . Alors, il existe une extension finie  $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  totalement réelle, galoisienne, non ramifiée en  $p$ , et une représentation algébrique cuspidale régulière  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$  de poids  $k$ , non ramifiée en les premiers de  $F$  au dessus de  $p$ , et un plongement  $i$  du corps de rationalité  $E(\pi)$  de  $\pi$  dans  $E$  tels que la restriction de  $\rho$  à  $F$  soit isomorphe à  $\rho_{\pi, i}$ .*

*Remarque.* R Taylor prouve un énoncé plus général où l'hypothèse  $2 \leq k \leq (p+1)/2$  est remplacée par  $2 \leq k \leq p-1$  avec des hypothèses d'irréductibilité de la restriction de la réduction de  $\rho$  au corps quadratique non ramifié en dehors de  $p$  (th. 6.1. de [23]).

### 2.3.2 Complément.

Nous avons besoin du complément suivant :

**Proposition 4** *Soient  $l_1, \dots, l_r$  des premiers  $\neq p$  et n'appartenant pas à  $S$ . Alors, on peut supposer  $F$  non ramifié au dessus de  $l_1, \dots, l_r$ .*

*Preuve.* On reprend la preuve de Taylor.

Soit  $\bar{\rho}$  une réduction de  $\rho$ . Si  $\bar{\rho}$  n'est pas irréductible ou que  $\bar{\rho}$  est irréductible à image résoluble et que la restriction de  $\bar{\rho}$  au groupe d'inertie  $I_p$  en  $p$  a des caractères de niveau 1, le théorème de Taylor est vrai avec  $F = \mathbb{Q}$  d'après Skinner et Wiles puisque  $\bar{\rho}$  est  $D_p$  distinguée et  $\rho$  ordinaire ([18], [19], [20]).

Supposons que  $\bar{\rho}$  a une image qui n'est pas résoluble et que la restriction de  $\bar{\rho}$  à  $I_p$  a des caractères de niveau 1. On est alors dans le cas de [24]. Dans [24], la représentation  $\rho$  est une représentation  $\ell$ -adique (et pas  $p$ -adique), et pour la suite de cette preuve, nous reprenons la notation de Taylor. La preuve de Taylor utilise un premier  $p$  (p. 131) choisi par application du théorème de Chebotarev et en dehors d'un ensemble fini de premiers ; on peut supposer  $p$  distinct des  $l_i$ .

Dans le lemme 1.1. de [24], si on suppose  $L$  non ramifié au-dessus des  $l_i$ ,  $S$  ne contenant pas de premiers de  $K$  de caractéristique résiduelle l'un des  $l_i$ , et le caractère  $\phi$  non ramifié en les premiers de  $K$  au dessus des  $l_i$ , on peut choisir le caractère  $\Psi$  non ramifié en les premiers de  $L$  au dessus des  $l_i$ . En effet, p. 132 l.1 de [24], on peut choisir  $\Psi_0$  non ramifié en les  $l_i$  (en fait, non ramifié hors des premiers de  $L$  au dessus de  $p$ ). Précisons le choix du  $\Psi_0$  l. 13. On ajoute à  $T$  les places au dessus des  $l_i$  et on définit pour ces places  $x$  comme caractère  $\Psi_x$  le caractère trivial. La fin de la preuve du lemme reste la même.

Dans l'application du théorème de Moret-Bailly p. 136 (th. 1.3. de [13] partie 2), on peut imposer que le corps  $E$  est non ramifié en les  $l_i$ . En effet, il existe une variété abélienne  $A$  sur  $\mathbb{Q}$  avec multiplication par  $O_M$  et de dimension  $[M : \mathbb{Q}]$ , principalement polarisée du type HBAV (p. 133) et qui a bonne réduction en les  $l_i$  : prendre une courbe elliptique ayant bonne réduction en

les  $l_i$  et tensoriser par  $O_M$  (cf lemme 1.4. de [24]). Les structures de niveau définissant le schéma de module  $X$  p. 136 sont non ramifiées en les  $l_i$ . La variété abélienne  $A$  fournit donc un point de  $X$  à valeurs dans une extension finie  $L_{l_i}$  non ramifiée convenable de  $\mathbb{Q}_{l_i}$ . On en déduit la proposition dans le cas de [24].

Passons au cas où l'inertie en  $p$  agit sur  $\bar{\rho}$  par des caractères de niveau 2 ([23]). On choisit :

- p. 29 (de [23]), le corps quadratique imaginaire  $M$  non ramifié en les  $l_i$  ;
- p. 30,  $\chi_0$  non ramifié en les  $l_i$  ;  $p_i$ ,  $i = 1, 2$  distincts des  $l_i$  ;
- dans le lemme 4.3.,  $\chi$  non ramifié en les  $l_i$  comme on l'a fait dans le lemme 1.1. de [24].

Alors, le caractère  $\chi_\lambda$  défini p. 32 l. -13, -9 (pour  $x = \lambda$ ) est non ramifié en les  $l_i$ . Les espaces de modules  $X_{\bar{\rho}}$  et  $X_{Dih}$  deviennent isomorphes sur une extension non ramifiée des  $\mathbb{Q}_{l_i}$ . On a donc un point de  $X_{\bar{\rho}}$  rationnel sur un corps  $F$  satisfaisant aux conclusions du théorème de Taylor et qui de plus est non ramifié en les  $l_i$ . Cela prouve le complément.  $\square$

### 2.3.3 Le corps $\underline{E}(\rho)$ .

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème de Taylor.

**Proposition 5** *Soit  $\rho$  comme dans l'énoncé du théorème de Taylor. Alors, il existe une extension finie  $\underline{E}(\rho)$  de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $E$  caractérisée par la propriété suivante :*

- *il existe une extension finie  $L_0$  de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\bar{\mathbb{Q}}$  telle que, pour  $L$  extension finie de  $L_0$  contenue dans  $\bar{\mathbb{Q}}$ ,  $\underline{E}(\rho)$  soit le sous-corps de  $E$  engendré par les coefficients des polynômes caractéristiques des  $\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}})$ , pour  $\mathcal{L}$  premier de  $L$  premier aux éléments de  $S \cup \{p\}$ .*

*Pour  $F$ ,  $\pi$ ,  $E(\pi)$  et  $i$  comme dans l'énoncé du théorème de Taylor,  $i(E(\pi))$  contient  $\underline{E}(\rho)$ .*

*Preuve de la proposition.* Soient  $F$ ,  $\pi$ ,  $E(\pi)$  et  $i$  comme dans l'énoncé du théorème de Taylor. Alors, pour  $L$  extension finie de  $F$  contenue dans  $\bar{\mathbb{Q}}$ , et  $\mathcal{L}$  premier de  $L$  qui n'est pas au dessus d'un premier de  $S \cup \{p\}$ , les coefficients des polynômes caractéristiques de  $\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}})$  appartiennent à  $i(E(\pi))$ . Notons  $\underline{E}_L$  le sous-corps de  $i(E(\pi))$  qu'ils engendrent. On pose :  $\underline{E}(\rho) = \cap_L \underline{E}_L$ . La proposition résulte immédiatement de ce que, pour  $L \subset L'$ , on a  $\underline{E}_L \subset \underline{E}_{L'}$ .  $\square$

## 2.4 Construction d'une représentation $q$ -adique.

**Proposition 6** *Supposons  $p > 3$ . Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(E)$  une représentation  $p$ -adique absolument irréductible, géométrique de conducteur 1 et de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ . On suppose  $k$  pair (ou, ce qui est équivalent,  $\rho$  impaire, cf corollaire 1. On suppose que  $2 \leq k \leq (p+1)/2$ . Soient  $q$  un nombre premier  $\neq 2$ ,  $\bar{\mathbb{Q}}_q$  une clôture algébrique du corps des nombres  $q$ -adiques, et  $i_q$  un plongement du corps  $\underline{E}(\rho)$  (2.3.3) dans  $\bar{\mathbb{Q}}_q$ . Alors, il existe une extension finie  $E_q$  de  $\mathbb{Q}_q$  contenant  $i_q(\underline{E}_\rho)$  et une représentation  $q$ -adique  $\rho_q : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(E_q)$  qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

- la restriction de  $\rho_q$  à tout sous-groupe ouvert de  $G_{\mathbb{Q}}$  est absolument irréductible (autrement dit  $\rho_q$  n'est pas potentiellement abélienne),  $\rho_q$  est impaire, géométrique de conducteur 1 et de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$  ;  
- il existe  $L$  extension finie de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  telle que pour  $\mathcal{L}$  premier de  $L$  qui n'est pas au-dessus de  $\{p, q\}$ , les coefficients  $\text{tr}(\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}}))$  et  $\det(\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}}))$  du polynôme caractéristique de  $\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}})$  appartiennent à  $\underline{E}(\rho)$  et que l'on ait :

$$\text{tr}(\rho_q(\text{Frob}_{\mathcal{L}})) = i_q(\text{tr}(\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}}))), \det(\rho_q(\text{Frob}_{\mathcal{L}})) = i_q(\det(\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}}))).$$

*Preuve de la proposition.* Soit  $\rho$  comme dans l'énoncé de la proposition.

**Lemme 2** *Pour toute extension finie  $L$  de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , la restriction  $\rho|_{G_L}$  de  $\rho$  au groupe de Galois  $G_L$  de  $\overline{\mathbb{Q}}/L$  est absolument irréductible.*

*Preuve du lemme.* Soit  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . La représentation  $\rho|_{G_L}$  est semi-simple. Comme elle est de dimension 2, elle est soit absolument irréductible, soit son image est abélienne. Comme  $\rho$  est absolument irréductible, géométrique de conducteur 1, le deuxième cas est exclus par la proposition 3. Le lemme en résulte.

Soit  $\ell$  un nombre premier  $\neq p$ . Appliquons le théorème de Taylor (th 2) et son complément (prop. 4) avec  $\{\ell\}$ , ce qui est possible puisque  $\rho$  de conducteur 1 est non ramifiée en  $\ell$ . Soient donc  $F^{\{\ell\}}$  un corps totalement réel non ramifié au dessus de  $\ell$ ,  $\pi^{\{\ell\}}$  une représentation cuspidale de  $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{F^{\{\ell\}}})$ ,  $i^{\{\ell\}}$  un plongement du corps des coefficients  $E(\pi^{\{\ell\}})$  de  $\pi^{\{\ell\}}$  dans  $E$  tels que la restriction de  $\rho$  à  $G_{F^{\{\ell\}}}$  soit isomorphe à  $\rho_{\pi^{\{\ell\}}, i^{\{\ell\}}}$ .

Comme  $i^{\{\ell\}}(E(\pi^{\{\ell\}}))$  contient les coefficients des polynômes caractéristiques des  $\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}})$  pour  $\mathcal{L}$  premier de  $F^{\{\ell\}}$  qui n'est pas au-dessus de  $p$ , il résulte de la proposition 5 que le corps  $\underline{E}(\rho)$  est contenu dans  $i^{\{\ell\}}(E(\pi^{\{\ell\}}))$ . Choisissons un plongement  $i_q^{\{\ell\}}$  de  $E(\pi^{\{\ell\}})$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_q$  qui prolonge  $i_q$ , considéré comme un plongement de  $i^{-1}(\underline{E}(\rho))$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_q$  via  $i$ . Notons  $E_q^{\{\ell\}}$  l'adhérence de  $i_q^{\{\ell\}}(E(\pi^{\{\ell\}}))$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_q$ . Soit  $\rho_q^{\{\ell\}} : G_{F^{\{\ell\}}} \rightarrow \text{GL}_2(E_q^{\{\ell\}})$  la représentation associée à  $\pi^{\{\ell\}}$  et  $i_q^{\{\ell\}}$  par Taylor dans [22].

Soit  $\tau \in G_{\mathbb{Q}}$ . Notons  $\text{int}(\tau)(\rho_q^{\{\ell\}})$  la représentation  $q$ -adique de  $G_{F^{\{\ell\}}}$  conjuguée de  $\rho_q^{\{\ell\}}$  par  $\tau$ . Dans la représentation  $\text{int}(\tau)(\rho_q^{\{\ell\}})$ , le groupe de Galois  $G_{F^{\{\ell\}}}$  agit donc sur le même espace vectoriel  $E_q^{\{\ell\}} \oplus E_q^{\{\ell\}}$  que dans la représentation  $\rho_q^{\{\ell\}}$ , mais par  $\sigma \mapsto \rho_q^{\{\ell\}}(\tau\sigma\tau^{-1})$ .

**Lemme 3** *La représentation  $\text{int}(\tau)(\rho_q^{\{\ell\}})$  est isomorphe à  $\rho_q^{\{\ell\}}$  : il existe  $g_{\tau} \in \text{GL}_2(E_q^{\{\ell\}})$  tel que, pour tout  $\sigma \in G_{F^{\{\ell\}}}$  :*

$$\rho_q^{\{\ell\}}(\tau\sigma\tau^{-1}) = g_{\tau}\rho_q^{\{\ell\}}(\sigma)g_{\tau}^{-1}.$$



*Preuve.* La représentation galoisienne  $\text{int}(\tau)(\rho_q^{\{\ell\}})$  est associée à la représentation automorphe  $\tau\pi^{\{\ell\}}$  obtenue en composant  $\pi^{\{\ell\}}$  avec l'automorphisme de  $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{F^{\{\ell\}}})$  défini par  $\tau$  et au plongement  $i$  du corps de définition  $E(\tau\pi^{\{\ell\}})$  de  $\tau\pi^{\{\ell\}}$  (clairement  $E(\tau\pi^{\{\ell\}}) = E(\pi^{\{\ell\}})$ ). La représentation  $p$ -adique associée à  $\tau\pi^{\{\ell\}}$  est la représentation conjuguée  $\text{int}(\tau)(\rho_{F^{\{\ell\}}})$  de la restriction  $\rho_{F^{\{\ell\}}}$  de  $\rho$  à  $G_{F^{\{\ell\}}}$ . La représentation  $\text{int}(\tau)(\rho_{F^{\{\ell\}}})$  est isomorphe à  $\rho_{F^{\{\ell\}}}$ . En effet, pour tout  $\sigma \in G_{F^{\{\ell\}}}$  :

$$\text{int}(\tau)(\rho_{F^{\{\ell\}}}(\sigma)) = \rho(\tau)\rho_{F^{\{\ell\}}}(\sigma)\rho(\tau)^{-1}.$$

Il résulte alors du théorème de multiplicité 1 fort ([15]) que  $\tau\pi^{\{\ell\}}$  est isomorphe à  $\pi^{\{\ell\}}$ . On en déduit le lemme.

**Lemme 4** *Pour toute extension finie  $L$  de  $F^{\{\ell\}}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , la restriction de  $\rho_q^{\{\ell\}}$  à  $G_L$  est absolument irréductible.*

*Preuve.* Soit  $L$  une extension finie de  $F^{\{\ell\}}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Soit  $(\rho_q^{\{\ell\}})_{|G_L}$  est absolument irréductible, soit sa semi-simplifiée a une image abélienne. Le second cas est exclus. En effet, les représentations  $p$ -adiques et  $q$ -adiques  $\rho_{|G_L}$  et  $(\rho_q^{\{\ell\}})_{|G_L}$  sont compatibles (1.2.3. de [17]). Si  $(\rho_q^{\{\ell\}})_{|G_L}$  a une image abélienne, il résulte du corollaire 1 du th. 2 du 2.3. de [17] que la restriction de  $\rho$  à  $G_L$  a aussi une image abélienne. Ce n'est pas le cas (proposition 2.2). Le lemme est prouvé.

En particulier, la représentation  $\rho_q^{\{\ell\}}$  est absolument irréductible. Si  $g_\tau$  est comme dans le lemme 3, il en résulte que l'image  $\overline{g_\tau}$  de  $g_\tau$  dans  $\text{PGL}_2(E_q^{\{\ell\}})$  ne dépend pas du choix de  $g_\tau$ . On voit alors que  $\tau \mapsto \overline{g_\tau}$  est une représentation projective de  $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ . On la note  $\rho_{q,\text{proj}}^{\{\ell\}}$ .

**Lemme 5** *La restriction de  $\rho_{q,\text{proj}}^{\{\ell\}}$  à  $G_{F^{\{\ell\}}}$  est le composé de  $\rho_q^{\{\ell\}}$  avec la projection  $\text{GL}_2(E_q^{\{\ell\}}) \rightarrow \text{PGL}_2(E_q^{\{\ell\}})$ . La représentation  $\rho_{q,\text{proj}}^{\{\ell\}}$  ne dépend pas du choix de  $\ell$  : plus précisément, si  $\ell_1$  est un premier  $\neq p$ , et si  $E_q^{\{\ell,\ell_1\}}$  est le composé dans  $\overline{\mathbb{Q}}_q$  des corps  $E_q^{\{\ell\}}$  et  $E_q^{\{\ell_1\}}$ , il existe un unique  $g \in \text{PGL}_2(E_q^{\{\ell,\ell_1\}})$  tel que  $\rho_{q,\text{proj}}^{\{\ell_1\}} = \text{int}(g)(\rho_{q,\text{proj}}^{\{\ell\}})$ .*

*Preuve.* La première partie du lemme est claire.

Prouvons la seconde partie. Soit  $\ell_1$  un premier  $\neq p$ . Soit  $L$  une extension galoisienne finie de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  contenant  $F^{\{\ell\}}$  et  $F^{\{\ell_1\}}$ , et telle que les coefficients des polynômes caractéristiques des  $\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}})$ , pour  $\mathcal{L}$  premier de  $L$  premier à  $p$ , soit contenus dans  $\underline{E}(\rho)$ . Les restrictions de  $\rho_q^{\{\ell\}}$  et  $\rho_q^{\{\ell_1\}}$  à  $G_L$  sont absolument irréductibles (lemme précédent). Elles ont même caractère puisque, pour  $\mathcal{L}$  premier de  $L$  premier à  $\ell, \ell_1$  et  $p$  :

$$\text{tr}(\rho_q^{\{\ell\}}(\text{Frob}_{\mathcal{L}})) = \text{tr}(\rho_q^{\{\ell_1\}}(\text{Frob}_{\mathcal{L}})) = i_q(\text{tr}(\rho(\text{Frob}_{\mathcal{L}}))).$$

Elles sont donc isomorphes et il existe un unique  $g \in \mathrm{PGL}_2(E_q^{\{\ell, \ell_1\}})$  tel que :

$$(\rho_q^{\{\ell_1\}})_{|G_L} = \mathrm{int}(g)(\rho_q^{\{\ell\}})_{|G_L}.$$

Notons  $\eta$  cette représentation de  $G_L$ . Soit  $\tau \in G_{\mathbb{Q}}$ . Posons  $\overline{g}_0 = \rho_{q, \mathrm{proj}}^{\{\ell_1\}}(\tau)$  et  $\overline{g}_1 = \mathrm{int}(g)(\rho_{q, \mathrm{proj}}^{\{\ell\}}(\tau))$ . Pour  $i = 0, 1$ ,  $\overline{g}_i$  vérifie, pour tout  $\sigma \in G_L$  :

$$\mathrm{int}(\overline{g}_i)(\eta(\sigma)) = \eta(\mathrm{int}(\tau)(\sigma)).$$

Comme ceci caractérise  $\overline{g}_i$ , on a  $\overline{g}_0 = \overline{g}_1$ , ce qui prouve le lemme.

On choisit  $\ell \neq p$  et on pose  $\rho_{q, \mathrm{proj}} = \rho_{q, \mathrm{proj}}^{\{\ell\}}$ . On pose  $E_q = E_q^{\{\ell\}}$ . Donc  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  est à valeurs dans  $\mathrm{PGL}_2(E_q)$ . Pour tout  $\ell_1 \neq p$ , on identifie  $\rho_{q, \mathrm{proj}}^{\{\ell\}}$  à  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  grâce au lemme précédent.

**Lemme 6** *La représentation  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  est non ramifiée en dehors de  $q$ . Soit  $I_q \subset G_{\mathbb{Q}}$  un sous-groupe d'inertie en  $q$  ; comme  $F^{\{q\}}$  est non ramifié en  $q$ ,  $I_q$  s'identifie à un sous-groupe de  $G_{F^{\{q\}}}$ . La restriction de  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  à  $I_q$  coïncide à un automorphisme intérieur près avec le composé de  $(\rho_q^{\{q\}})_{|I_q}$  avec la projection  $\mathrm{GL}_2(E_q) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(E_q)$ . Si  $q \neq 2$ , la représentation  $(\rho_q^{\{q\}})_{|I_q}$  est cristalline de type de Hodge-Tate constant  $(0, k-1)$  (prop. 2.1).*

*Preuve.* Si  $q = p$ , la proposition est claire. On suppose  $q \neq p$ .

Soit  $\ell_1$  un premier  $\neq p$ . Comme  $\rho$  est non ramifiée en dehors de  $p$ , il résulte d'un théorème de H Carayol ([6]) complété par R Taylor (introduction de [22]) que la représentation automorphe  $\pi^{\{\ell_1\}}$  est non ramifiée en  $\ell_1$ . Si  $\ell_1 \neq q$ , on voit que  $\rho_q^{\{\ell_1\}}$  est non ramifiée en  $\ell_1$ . Comme  $F^{\{\ell_1\}}$  est non ramifié en  $\ell_1$ ,  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  est non ramifiée en  $\ell_1$  ( $\ell_1 \neq p, q$ ). Elle est aussi non ramifiée en  $p$  car  $\pi^{\{\ell\}}$  et  $F^{\{\ell\}}$  le sont (th. 2) et que l'on a supposé  $q \neq p$ . On a donc prouvé que  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  est non ramifiée en dehors de  $q$ .

Comme  $\rho$  est non ramifiée en  $q$ ,  $\pi^{\{q\}}$  est non ramifiée en  $q$ . Comme  $F^{\{q\}}$  est non ramifié en  $q$  et que  $q \neq 2$ , il résulte de C Breuil ([5]) que la restriction de  $\rho_q^{\{q\}}$  à un sous-groupe d'inertie en un premier de  $F^{\{q\}}$  au dessus de  $q$  est limite  $q$ -adique de représentations cristallines de poids de Hodge-Tate  $\in \{0, k-1\}$ . Il résulte de L Berger ([4]) que  $\rho_q^{\{q\}}$  est cristalline de poids de Hodge-Tate  $\in \{0, k-1\}$ . Comme le caractère de Dirichlet de la forme modulaire de Hilbert associée à  $\pi^{\{q\}}$  est trivial, le déterminant de  $\rho_q^{\{q\}}$  est la restriction de  $\chi_q^{k-1}$  à  $G_{F^{\{q\}}}$ . On voit alors que le type de  $\rho_q^{\{q\}}$  est bien constant égal à  $(0, k-1)$ . Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

Notons  $O_q$  l'anneau de valuation de  $E_q$ . L'image de  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  est compacte. Les sous-groupes compacts maximaux de  $\mathrm{PGL}_2(E_q)$  sont les images des sous-groupes du type  $\mathrm{GL}(T)$ , pour  $T \subset (E_q)^2$  un  $O_q$ -réseau. Après conjugaison, on peut supposer que l'image de  $\rho_{q, \mathrm{proj}}$  est contenue dans  $\mathrm{PGL}_2(O_q)$ .

**Lemme 7** *La représentation  $\rho_{q,\text{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{PGL}_2(O_q)$  se relève en une représentation  $\rho_q : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(E_q)$  qui est irréductible, non ramifiée en dehors de  $q$ , et si  $q \neq 2$  cristalline en  $q$  de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ .*

*Preuve du lemme.* Notons  $d$  le morphisme  $\text{PGL}_2(O_q) \rightarrow O_q^*/(O_q^*)^2$  défini par le déterminant. Notons  $G$  le sous-groupe de  $\text{PGL}_2(O_q) \times O_q^*$  formé des  $(g, \lambda)$  tels que  $d(g) = \lambda \bmod (O_q^*)^2$ . On a la suite exacte :

$$(1) \quad 1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{GL}_2(O_q) \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Notons  $k_q$  le corps résiduel de  $O_q$ . De même, le déterminant définit un morphisme  $\bar{d} : \text{PGL}_2(k_q) \rightarrow k_q^*/(k_q^*)^2$ . Notons  $\bar{G}$  le sous-groupe de  $\text{PGL}_2(k_q) \times k_q^*$  formé des  $(\bar{g}, \bar{\lambda})$  tels que  $\bar{d}(\bar{g}) = \bar{\lambda} \bmod (\mathbb{F}_q^*)^2$ . On a la suite exacte :

$$(\bar{1}) \quad 1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{GL}_2(k_q) \rightarrow \bar{G} \rightarrow 1.$$

Comme  $q \neq 2$ , la suite exacte  $(\bar{1})$  est le “pull-back” de la suite (1). La représentation  $\gamma$  :

$$\rho_{q,\text{proj}} \times \chi_q^{k-1} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{PGL}_2(O_q) \times O_q^*$$

est à valeurs dans  $G$ . Soit en effet  $\delta : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow k_q^*/(k_q^*)^2$  le composé de  $\gamma$  avec  $(\bar{g}, \lambda) \mapsto \bar{d}(\bar{g})\bar{\lambda}^{-1}$ . Comme  $\gamma$  est non ramifié en dehors de  $q$ , le caractère  $\delta$  est non ramifié en dehors de  $q$ . Il est aussi non ramifié en  $q$ . En effet, le lemme précédent entraîne que la restriction de  $\delta$  à  $I_q$  est triviale. On voit que  $\delta$  est non ramifié partout, donc trivial et  $\gamma$  est bien à valeurs dans  $G$ .

Par réduction modulo  $q$ , on obtient une représentation  $\bar{\gamma}$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans  $\bar{G}$ . L’obstruction à relever  $\bar{\gamma}$  en une représentation  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(k_q)$  est un élément  $o(\bar{\gamma})$  dans le groupe  $\text{Br}(\mathbb{Q})_2$  des éléments tués par 2 du groupe de Brauer  $\text{Br}(\mathbb{Q})$ .

Cette obstruction vérifie le principe de Hasse. Pour chaque premier  $\ell$ , la composante locale  $o(\bar{\gamma})_{\ell}$  est l’obstruction à relever la restriction de  $\bar{\gamma}$  à un sous-groupe de décomposition en  $\ell$ . Si  $\ell \neq q$ , elle est nulle car  $\bar{\gamma}$  est non ramifiée en  $\ell$ .

L’obstruction  $o(\bar{\gamma})_q$  est aussi nulle. Soit en effet  $I_q \subset G_{\mathbb{Q}}$  un sous-groupe d’inertie en  $q$ . La restriction de  $\rho_q^{\{q\}} : G_{F^{\{q\}}} \rightarrow \text{GL}_2(E_q)$  à  $I_q$  est un relèvement de la restriction de  $\gamma$  à  $I_q$ . Il est cristallin. L’unicité de ce relèvement cristallin entraîne alors qu’il se prolonge au sous-groupe de décomposition en  $q$  (proposition 1.2. de [26]).

On a donc que les composantes locales  $o(\bar{\gamma})_{\ell}$ , pour  $\ell$  premier de  $\mathbb{Q}$ , sont nulles. C’est donc que  $o(\bar{\gamma})$  est nulle. La représentation  $\bar{\gamma}$  se relève en une représentation  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ . Il en résulte que  $\gamma$  se relève en une représentation  $\hat{\gamma} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(O_q)$  qui est non ramifiée en dehors d’un ensemble fini  $S$  de nombres premiers. De plus, pour chaque premier  $\ell \in S$ , si  $I_{\ell} \subset G_{\mathbb{Q}}$  est un sous-groupe d’inertie en  $\ell$ , il existe un caractère  $\eta_{\ell} : I_{\ell} \rightarrow \{\pm 1\}$  qui est tel que  $\hat{\gamma}|_{I_{\ell}} \eta_{\ell}$  soit non ramifiée si  $\ell \neq q$ , et cristalline si  $\ell = q$ . Pour  $\ell \neq 2$ , soit  $L_{\ell} = \mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon_{\ell}\ell})$ ,  $\epsilon_{\ell} = (-1)^{l-1/2}$ . Le corps quadratique  $L_{\ell}$  est ramifiée seulement

en  $\ell$  et  $I_\ell \rightarrow \text{Gal}(L_\ell/\mathbb{Q})$  identifie  $\text{Gal}(L_\ell/\mathbb{Q})$  avec le plus grand quotient de  $I_\ell$  qui est un groupe abélien tué par 2. Soit de même,  $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$  ;  $L_2$  est non ramifié en dehors de 2 et  $I_2 \rightarrow \text{Gal}(L_2/\mathbb{Q})$  identifie  $\text{Gal}(L_2/\mathbb{Q})$  avec le plus grand quotient de  $I_2$  qui est un groupe abélien tué par 2. On voit alors qu'il existe un caractère  $\eta : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \{\pm 1\}$  qui est tel que  $\hat{\gamma}\eta$  soit non ramifié en dehors de  $q$  et cristalline en  $q$ .

Posons  $\rho_q = \hat{\gamma}\eta$  ;  $\rho_q$  est donc géométrique de conducteur 1. Soit  $\ell$  un nombre premier  $\neq p$ . Il existe un caractère à image finie  $\eta$  de  $G_{F\{\ell\}}$  tel que la restriction de  $\rho_q$  à  $G_{F\{\ell\}}$  coïncide avec la représentation obtenue à partir de  $\rho_q^{\{\ell\}}$  par torsion par le caractère  $\eta$ . Il en résulte que  $\rho_q$  est impaire. Il résulte aussi du lemme 4 que la restriction de  $\rho_q$  à tout sous-groupe ouvert de  $G_{\mathbb{Q}}$  est absolument irréductible. Enfin, la propriété de compatibilité avec  $\rho$  de la proposition est vérifiée pour  $L$  correspondant au noyau de  $\eta$ . La proposition est prouvée.

## 2.5 Conclusion de la démonstration du théorème 1.

Soit donc  $\rho$  une représentation  $p$ -adique géométrique de conducteur 1 et de poids  $(0, k)$ ,  $k = 2$ , ou  $k = 4$  et  $p \geq 7$ .

Supposons tout d'abord  $p > 3$ . Supposons  $\rho$  irréductible. Il résulte de la proposition 3 que  $\rho$  n'est pas potentiellement abélienne. On applique alors la proposition 6 avec  $q = 7$ . JM Fontaine a prouvé qu'une représentation  $p$ -adique  $\rho$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie arbitraire, qui est non ramifiée en dehors de  $p$  et cristalline en  $p$  à poids de Hodge-Tate dans l'intervalle  $[0, h]$  est extensions de  $\mathbb{Q}_p(i)$  sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

- $h = 1$  et  $2 < p \leq 17$  ([9]);
- $h = 3$  et  $p = 7$  ([10]).

V Abrashkin a donné indépendamment de JM Fontaine une démonstration du cas  $k = 2$  qui marche aussi pour  $p = 2$  ([2]). On voit donc que  $\rho_7$  en fait n'existe pas. Donc  $\rho$  n'est pas irréductible.

Si  $k = 2$  et  $p = 2, 3$ , les théorèmes de Fontaine et Abrashkin donnent directement que  $\rho$  est réductible.

On voit donc que  $\rho$  est réductible. Les résultats de Soulé cités dans l'introduction entraînent alors le théorème.

## 3 Application aux groupes $p$ -divisibles.

**Corollaire 2** *Soit  $\Gamma$  un groupe  $p$ -divisible sur  $\mathbb{Z}$ . Soient  $O_E$  l'anneau des entiers de  $E$  et  $O \subset O_E$  un ordre de  $O_E$ . Soit  $n$  le degré de  $E/\mathbb{Q}_p$ . On suppose que  $\Gamma$  est de hauteur  $2n$  et que l'on a un plongement de  $O$  dans  $\text{End}(\Gamma)$ . Alors,  $\Gamma$  est isogène à une somme directe de deux groupes  $p$ -divisibles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  étant isomorphes soit au groupe constant  $E/O_E$  ou à son dual de Cartier  $O_E \otimes \mu_{p^\infty}$ .*

*Démonstration du corollaire.* Soient  $T$  le module de Tate de  $\Gamma$  et  $U = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ . La représentation  $\rho(\Gamma)$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans  $U$  est non ramifiée en dehors de  $p$  et cristalline de poids  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  ou  $(1, 1)$ . Si les poids sont  $(0, 0)$ ,  $\rho(\Gamma)$  est triviale. Si elle est de poids  $(1, 1)$ , la représentation tordue  $U(-1)$  l'est. Si elle est de poids 0 et 1, le théorème entraîne qu'elle est isomorphe à  $E \oplus E(1)$ . Ceci prouve le corollaire, puisque  $\rho(\Gamma)$  détermine  $\Gamma$  à isogénie près ([21]).

## 4 Représentations géométriques de conducteur 1 de bas poids ordinaires en 3.

**Proposition 7** *Soient  $p$  un premier  $> 2$  et  $k$  un entier vérifiant  $2 \leq k \leq (p+1)/2$ . Il n'existe pas de représentations  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  qui soit impaire, irréductible, géométrique de conducteur 1 et de poids  $k$ , et qui vérifie l'hypothèse d'ordinarité en 3 suivante :*

- il existe un plongement  $i_3 : \underline{E}(\rho) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_3}$  et une valeur propre  $\lambda$  de  $\rho(\mathrm{Frob}_3)$  telle que  $i_3 \circ i^{-1}(\lambda)$  soit une unité 3-adique (pour la définition de  $\underline{E}(\rho)$ , voir 2.3.3).

*Preuve.* Soit  $\rho$  comme dans l'énoncé de la proposition. On applique la proposition 6 avec  $q = 3$  et  $i_3$ : on obtient la représentation 3-adique  $\rho_3$ . Soit  $\bar{\rho}_3$  une réduction de  $\rho_3$ . Elle est non ramifiée hors de 3. Elle est impaire. Un théorème de Serre dit alors que sa semi-simplifiée est isomorphe à  $1 \oplus \overline{\chi}_3$  (p. 710 de [16]). Un théorème de Wiles dit que l'hypothèse d'ordinarité en 3 entraîne que la restriction de  $\rho_3$  au groupe d'inertie en 3 est du type :

$$\begin{pmatrix} \chi_3^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(th. 2 de [25]). Un théorème de Skinner et Wiles donne la modularité de  $\rho_3$  ([18]). La théorie de Hida dit alors que  $\rho_3$  n'existe pas (7.6. de [12]). La représentation  $\rho_3$  proviendrait d'une forme parabolique  $f$  de niveau 1 ordinaire en 3, qui serait une spécialisation d'une famille de Hida, dont la spécialisation en poids 2 serait une forme parabolique de poids 2 pour  $\Gamma_0(3)$ . Une telle forme n'existe pas.

*Remarque.* Si l'on connaissait le théorème de Skinner et Wiles sans l'hypothèse d'ordinarité de l'action de  $I_3$  sur la représentation 3-adique, on aurait la modularité de  $\rho$  sans l'hypothèse d'ordinarité en 3 de  $\rho$ .

## References

- [1] *Périodes p-adiques*. Société Mathématique de France, Paris, 1994. Papers from the seminar held in Bures-sur-Yvette, 1988, Astérisque No. 223 (1994).
- [2] V. A. Abrashkin. Galois modules of group schemes of period  $p$  over the ring of Witt vectors. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 51(4):691–736, 910, 1987.

- [3] Denis Benois and Thong Nguyen Quang Do. Les nombres de Tamagawa locaux et la conjecture de Bloch et Kato pour les motifs  $\mathbb{Q}(m)$  sur un corps abélien. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(5):641–672, 2002.
- [4] Laurent Berger. Limites de représentations cristallines. *A paraître à Compositio*.
- [5] Christophe Breuil. Une remarque sur les représentations locales  $p$ -adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert. *Bull. Soc. Math. France*, 127(3):459–472, 1999.
- [6] Henri Carayol. Sur les représentations  $l$ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(3):409–468, 1986.
- [7] Luis Dieulefait. Existence of families of Galois representations and new cases of the Fontaine-Mazur conjecture. *arXiv:math.NT0304433*, 2003.
- [8] Jean-Marc Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [9] Jean-Marc Fontaine. Il n’y a pas de variété abélienne sur  $\mathbf{Z}$ . *Invent. Math.*, 81(3):515–538, 1985.
- [10] Jean-Marc Fontaine. Schémas propres et lisses sur  $\mathbf{Z}$ . In *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989)*, pages 43–56, Delhi, 1993. Hindustan Book Agency.
- [11] Jean-Marc Fontaine and Barry Mazur. Geometric Galois representations. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 41–78. Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [12] Haruzo Hida. *Elementary theory of  $L$ -functions and Eisenstein series*, volume 26 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [13] Laurent Moret-Bailly. Groupes de Picard et problèmes de Skolem. I, II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(2):161–179, 181–194, 1989.
- [14] Bernadette Perrin-Riou. La fonction  $L$   $p$ -adique de Kubota-Leopoldt. In *Arithmetic geometry (Tempe, AZ, 1993)*, volume 174 of *Contemp. Math.*, pages 65–93. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [15] I. I. Piatetski-Shapiro. Multiplicity one theorems. In *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 209–212. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

- [16] Jean-Pierre Serre. *Œuvres. Vol. III*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. 1972–1984.
- [17] Jean-Pierre Serre. *Abelian  $l$ -adic representations and elliptic curves*, volume 7 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998. With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original.
- [18] C. M. Skinner and A. J. Wiles. Residually reducible representations and modular forms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (89):5–126 (2000), 1999.
- [19] C. M. Skinner and Andrew J. Wiles. Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 10(1):185–215, 2001.
- [20] Chris Skinner. Modularity of Galois representations. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 15(1):367–381, 2003. Les XXIIèmes Journées Arithmétiques (Lille, 2001).
- [21] J. T. Tate.  $p$  – divisible groups.. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer, Berlin, 1967.
- [22] Richard Taylor. On Galois representations associated to Hilbert modular forms. *Invent. Math.*, 98(2):265–280, 1989.
- [23] Richard Taylor. On the meromorphic continuation of degree two L-functions. *Preprint*, pages 1–53, 2001.
- [24] Richard Taylor. Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(1):125–143, 2002.
- [25] A. Wiles. On ordinary  $\lambda$ -adic representations associated to modular forms. *Invent. Math.*, 94(3):529–573, 1988.
- [26] J.-P. Wintenberger. Relèvement selon une isogénie de systèmes  $l$ -adiques de représentations galoisiennes associés aux motifs. *Invent. Math.*, 120(2):215–240, 1995.

Jean-Pierre Wintenberger  
 Université Louis Pasteur  
 Département de Mathématiques, IRMA  
 7, rue René Descartes  
 67084 Strasbourg Cedex  
 France

e-mail [wintenb@math.u-strasbg.fr](mailto:wintenb@math.u-strasbg.fr)  
tel 03 90 24 02 17 , fax 03 90 24 03 28